Der Ring der Modularkorrespondenzen

1. Einleitung.

Es sei: $\Gamma(N) = \mathrm{Ker}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$, die Hauptkongruenzuntergruppe der Stufe N,
$X_N = \Gamma(N)\backslash\mathfrak{H}^*$, die zugehörige Modulkurve,
$J_N = \mathrm{Jac}(X_N)$, deren Jacobische Varietät,
$\mathbb{E}_N = \mathrm{End}^0(J_N) = \mathrm{End}(J_N) \otimes \mathbb{Q}$, die Endomorphismenalgebra von J_N (Ring der Korrespondenzen).

Klein (1879), Hurwitz (1883): Jede Matrix

$$A \in M_n^* := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{Z}) : (a,b,c,d) = 1, ad - bc = n\}$$

definiert eine irreduzible Kurve $C_A = C_A^{(N)}$ auf $X_N \times X_N$ und daher auch eine Korrespondenz

$$T_A = T_A^{(N)} : J_N \to J_N,$$

die zu A gehörige Modularkorrespondenz (der Stufe N). Zum Beispiel ist

$$T_p = T_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)} \quad \text{die bekannte } p\text{-te Hecke Korrespondenz.}$$

Der von den $\{T_A : A \in M_n^*, n \geq 1\}$ erzegte $\mathbb{Q}$-Vectorraum

$$\mathbb{M}_N = \sum \mathbb{Q} T_A \subset \mathbb{E}_N$$

ist, wie bekannt (Shimura), ein Unterring von $\mathbb{E}_N$, und heißt der Ring (Algebra) der Modularkorrespondenzen der Stufe N.

Frage: Wann ist jede Korrespondenz auf X_N modular, d.h., wann ist $\mathbb{M}_N = \mathbb{E}_N$?

2. Zur Geschichte der Modularkorrespondenzen.

Dedekind (1877) führt den Namen (und Begriff) "elliptische Modulfunktion" ein, definiert die j-Funktion ("Valenz") und studiert die Modulargleichung

$$F_A(j, j_A) = 0,$$

wobei $A \in M_n^*$ und $j_A(z) = j(A(z))$. Spezialfall: $F_n = F_{\left(\begin{smallmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}$.

Er beweist, daß $F_A(X, Y) \in \mathbb{Q}[X, Y]$ ein irreduzibles Polynom ist, und erwähnt, daß das Studium der Klassengleichung $F_n(X, X) = 0$ zu den Kroneckerschen Resultaten (1857ff) über komplexe Multiplikation führt.

Klein (1879) verallgemeinert den (Dedekindschen) Begriff der elliptischen Modulfunktion, indem er die Gruppe $\Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ durch eine Kongruenzuntergruppe $\Gamma \leq \Gamma(1)$ ersetzt, insb. durch $\Gamma = \Gamma(N)$. Dabei wird die Modulkurve

$$X_\Gamma = \text{Kompaktifizierung der Riemannschen Fläche } \Gamma\backslash\mathfrak{H}$$

eingehend untersucht.

Er erwähnt, daß die natürliche Verallgemeinerung der Modulargleichung der Begriff der modularen Korrespondenz ist.

Grundidee: Sei $\tilde{C}_A = \{(z, A(z)) : z \in \mathfrak{H}\} \subset \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ der Graph der zu $A \in M_n^*$ gehörigen (Moebius) Transformation. Dessen Bild $(\pi_\Gamma \times \pi_\Gamma)(\tilde{C}_A)$ auf $\Gamma\backslash\mathfrak{H} \times \Gamma\backslash\mathfrak{H}$ ist, wie man beweisen kann, eine irreduzible algebraische Kurve auf $\Gamma\backslash\mathfrak{H} \times \Gamma\backslash\mathfrak{H}$, und man erhält daher eine Kurve/Korrespondenz

$$C_A^\Gamma \subset X_\Gamma \times X_\Gamma.$$

Gierster (1880, 1883), Hurwitz (1883) benützen (und entwickeln) die Theorie der Modularkorrespondenzen, um gewisse Klassenzahlrelationen zu erhalten, die die Klassenzahlrelationen von Kronecker verallgemeinern.

Hurwitz (1883 – 1887) betrachtet die Wirkung der (Modular)korrespondenzen auf dem Raum $\Omega^1(X)$ der Differentiale 1. Gattung von $X = X_\Gamma$, wie folgt.

Ist $C \subset X \times X$ eine irreduzible Kurve mit Normalisierung $\nu_C : X_C \to C$, so ist X_C eine kompakte Riemannsche Fläche und wir haben zwei Überlagerungen
$$\begin{array}{ccc} & X_C & \\ {}^{\pi_C}\swarrow & & \searrow^{\pi'_C} \\ X & & X \end{array},$$
die durch
$$\pi_C = \mathrm{pr}_1 \circ \nu_C \quad \text{und} \quad \pi'_C = \mathrm{pr}_2 \circ \nu_C$$
gegeben sind. Setzen wir
$$(T_C)_*(\omega) = \mathrm{tr}_{\pi'_C}(\pi_C^*(\omega)), \quad \forall \omega \in \Omega^1(X),$$
so erhalten wir einen $\mathbb{C}$-linearen Operator $(T_C)_* \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Omega^1(X))$.

Bemerkung: 1) Ist $C = C_A^\Gamma$, so kann man den Operator $(T_A^\Gamma)_* := (T_C)_*$ als Summe von Moebius Transformationen explizit hinschreiben.

2) Hurwitz stellte fest, daß i.A. $(T_A^\Gamma)_* \neq m \cdot id_\Omega, \forall m \in \mathbb{Z}$, d.h., daß diese Korrespondenzen allgemeiner sind als die, die die Geometer (Chasles, Brill, Cayley) betrachtet hatten. Das führt ihn dazu, ein "Verallgemeinertes Korrespondenzenprinzip" (= Spurformel) aufzustellen, das man als Spezialfall der späteren Eichler-Selberg Spurformel deuten kann.

Klein/Fricke (1892) geben in Band II der

Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen

eine systematische Darstellung der Theorie der Korrespondenzen (auf einer kompakten Riemannschen Fläche), wie sie von Hurwitz(1887) und Klein(1889) entwickelt wurde.

Weiter werden die Modularkorrespondenzen als explizite Korrespondenzen eingehend untersucht; siehe z. Bsp. S. 596:

Unsere wesentliche Aufgabe wird natürlich die sein, dass wir die Modularcorrespondenzen in die allgemeine Correspondenztheorie des vorletzten Kapitels einordnen.

Hecke (1936-37) benützt spezielle modulare Operatoren (z. Bsp. die “Hecke-Operatoren” $(T_p)_*$), und untersucht das Verhalten der Fourierkoeffizienten unter der Wirkung dieser Operatoren auf einer Spitzenform $f \in S_k(\Gamma)$. (Beachte: $\Omega^1(X_\Gamma) \simeq S_2(\Gamma)$.) Ein Kernpunkt hier ist das Studium der Heckealgebra $\mathbb{T}_\Gamma$.

Shimura (1971) gibt in seinem Buch eine systematische Einführung in die Modularkorrespondenzen (ohne sie so zu nennen) und studiert die Heckealgebra.

Ribet (1980) beweist die Tate-Vermutung (vor Faltings!) für modulare Jacobische Varietäten. Dazu muß er genügend viele Homomorphismen (= Korrespondenzen) konstruieren, und das gelingt ihm mit Hilfe von Modularkorrespondenzen (ohne daß diese explizit erwähnt werden).

3. Das Hauptresultat.

Es sei: $\mathcal{K} = \{\mathbb{Q}(\sqrt{-n})\}_{n\geq 1}$ die Menge der imag.-quad. Körper,
$h(D)$ die Klassenzahl der (Formen der) Diskriminante D,
$h_K = h(d_K)$ the Klassenzahl von K, wobei $d_K = \mathrm{disc}(K)$.

Hauptsatz: Für $N \geq 1$ gilt

(1) $\quad \mathbb{M}_N = \mathbb{E}_N \;\Leftrightarrow\; h(N^2/d_K) = 1,\ \forall K \in \mathcal{K} \text{ mit } d_K|N.$

Bemerkung: Man sieht leicht, daß die Bedingung der rechten Seite zu den folgenden beiden Alternativen äquivalent ist:

(i) die Menge $\mathcal{K}_N := \{K \in \mathcal{K} : d_K|N\}$ ist leer;

(ii) $N = 6, 9, 14$ oder $N = |d_K|$, für ein $K \in \mathcal{K}$ mit $h_K = 1$.

Diese Bedingungen sind wiederum äquivalent zu:

(i′) $4 \nmid N$ und $p \equiv 1 \pmod 4, \forall p|N, p \neq 2$.

(ii′) $N = 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 14, 19, 43, 67, 163$.

Man beachte hierbei, daß die Äquivalenz von (ii′) mit (ii) die Lösung des Klassenzahl 1 Problems (Heegner) benötigt.

Korollar: (a) $\mathbb{M}_N = \mathbb{E}_N$, falls $N \leq 11$ oder $N = 13, 14, 17, 25, \ldots$

(b) $\mathbb{M}_N \neq \mathbb{E}_N$, falls $N = 12, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 24, \ldots$

Grundidee: $\mathbb{M}_N \subset \mathbb{E}_N$ sind halbeinfache Algebren, und es stellt sich heraus, daß

(2) $\qquad \mathbb{M}_N = \mathbb{E}_N \quad\Leftrightarrow\quad Z(\mathbb{M}_N) = Z(\mathbb{E}_N).$

4. Eine Algebrenstudie.

Es sei: Γ eine Gruppe mit $\Gamma_0(N) \geq \Gamma \geq \Gamma_1(N)$, wobei

$$\Gamma_1(N) := \{A \in \Gamma(1) : A \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \pmod N\},$$
$$\Gamma_0(N) := \{A \in \Gamma(1) : A \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \pmod N\};$$

$\mathbb{T}_\Gamma = \langle T_p^\Gamma : p \text{ ist prim}\rangle$, die Hecke Algebra von Γ;

$\mathbb{T}'_\Gamma = \langle T_p^\Gamma : p \text{ ist prim mit } p \nmid N\rangle$.

Wir haben also die folgende Schachtelung von $\mathbb{Q}$-Algebren:

$$\mathbb{T}'_\Gamma \subset \mathbb{T}_\Gamma \subset \mathbb{M}_\Gamma \subset \mathbb{E}_\Gamma. \tag{3}$$

Tatsache (Shimura): $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}_\Gamma) = g_{X_\Gamma}$ $(= \dim_{\mathbb{C}}(\Omega^1(X_\Gamma)))$.

Mit Hilfe der Resultate von Ribet (1980) kann man zeigen:

Satz 1 (K, 2008) Es sei $\mathbb{E}_\Gamma^{\mathbb{Q}} = (\mathbb{E}_\Gamma)^{G_{\mathbb{Q}}}$ die Unteralgebra der $\mathbb{Q}$-rationalen Endomorphismen von J_{X_Γ}. Dann gilt:

(a) $\mathbb{E}_\Gamma^{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{M}_\Gamma$;

(b) $\mathbb{T}'_\Gamma$ ist das Zentrum von $\mathbb{E}_\Gamma^{\mathbb{Q}}$, d.h., $Z(\mathbb{E}_\Gamma^{\mathbb{Q}}) = \mathbb{T}'_\Gamma$;

(c) $\dim(\mathbb{T}'_\Gamma) = |\mathcal{N}_2(\Gamma)|$, wobei $\mathcal{N}_2(\Gamma)$ die Menge der normalisierten Neuformen (aller Stufen) in $S_2(\Gamma)$ bezeichnet.

Beweisprinzip: Studiere die Wirkung der Algebra $\mathbb{E}_\Gamma^{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$ auf dem Raum $\Omega_\Gamma := \Omega^1(X_\Gamma) \simeq S_2(\Gamma)$, und benütze die Resultate der Atkin-Lehner Theorie und die von Ribet.

Kernpunkt: Ω_Γ ist ein treuer $\mathbb{E}_\Gamma^{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$-Modul.

Jedoch: Ω_Γ ist i.a. kein treuer $\mathbb{M}_\Gamma \otimes \mathbb{C}$-Modul! (Shimura)

5. Das CM Phänomen.

Grunderkenntnis: Die Existenz elliptischer CM-Kurven auf $J_\Gamma = J_{X_\Gamma}$ bewirkt, daß Ω_Γ als $\mathbb{M}_\Gamma \otimes \mathbb{C}$-Modul nicht treu sein kann.

Zur Erinnerung: Eine elliptische Kurve $E/\mathbb{C}$ hat CM, falls $\mathrm{End}^0(E) := \mathrm{End}(E) \otimes \mathbb{Q} \simeq K$, wobei $K \in \mathcal{K}$. Man sagt dann, daß K der CM-Körper von E ist.

Es sei: J_Γ^{CM} die abelsche Untervarietät von J_Γ, die von allen elliptischen CM-Kurven auf J_Γ erzegt wird.

J^{nCM} das "Komplement", d.h., die abelsche Untervarietät von J_Γ, die von allen einfachen abelschen Untervarietäten erzeugt wird, die keine elliptischen CM-Kurven sind.

Dann ist $J_\Gamma \sim J_\Gamma^{nCM} \times J_\Gamma^{CM}$ und wir haben die Zerfällung

$$\mathbb{E}_\Gamma = \mathbb{E}_\Gamma^{nCM} \oplus \mathbb{E}_\Gamma^{CM}$$

mit $\mathbb{E}_\Gamma^{nCM} \simeq \mathrm{End}^0(J_\Gamma^{nCM})$ und $\mathbb{E}_\Gamma^{CM} \simeq \mathrm{End}^0(J_\Gamma^{CM})$.

Bemerkung: 1) Man sieht leicht, daß

$$(4) \qquad Z(\mathbb{E}_\Gamma^{CM}) \simeq \prod_{K \in \mathcal{K}_\Gamma} K \quad \text{und} \quad \dim(Z(\mathbb{E}_\Gamma^{CM})) = 2|\mathcal{K}_\Gamma|,$$

wobei

$$\mathcal{K}_\Gamma = \{K \in \mathcal{K} : \exists E \text{ mit CM-Körper } K \text{ und } \mathrm{Hom}(E, J_\Gamma) \neq 0\}.$$

2) Die obige Zerfällung von J_Γ induziert auch die Zerfällungen

$$\mathbb{M}_\Gamma = \mathbb{M}_\Gamma^{nCM} \oplus \mathbb{M}_\Gamma^{CM} \quad \text{und} \quad \Omega_\Gamma = \Omega_\Gamma^{nCM} \oplus \Omega_\Gamma^{CM}.$$

Satz 2: (a) Ω_Γ^{nCM} ist ein treuer $(\mathbb{M}_\Gamma^{nCM} \otimes \mathbb{C})$-Modul der Multiplizität eins.

(b) Es ist $\mathbb{E}_\Gamma^{nCM} = \mathbb{M}_\Gamma^{nCM}$.

Bemerkung: Teil (b) benützt Teil (a) und die Resultate von Ribet (1980).

Korollar: Es ist $\mathbb{M}_\Gamma = \mathbb{E}_\Gamma$, falls $J_\Gamma^{CM} = 0$ ist.

Satz 3: Ist $J_\Gamma^{CM} \neq 0$, so ist Ω_Γ^{CM} kein treuer $\mathbb{M}_\Gamma^{CM} \otimes \mathbb{C}$-Modul. Genauer, setzen wir

$$\overline{\mathbb{M}}_\Gamma^{CM} := \mathrm{Im}(\mathbb{M}_\Gamma^{CM} \otimes \mathbb{C} \to \mathrm{End}_\mathbb{C}(\Omega_\Gamma^{CM})),$$

so gilt

$$\dim_\mathbb{C}(Z(\mathbb{M}_\Gamma^{CM} \otimes \mathbb{C})) = 2 \dim_\mathbb{C}(Z(\overline{M}_\Gamma^{CM})), \tag{5}$$

und Ω_Γ^{CM} ist ein (treuer) $\overline{\mathbb{M}}_\Gamma^{CM}$-Modul mit Multiplizität eins.

Bemerkung: Die obigen Multiplizität 1 Aussagen folgen sofort aus der (bekannten) Tatsache, daß

$$C_{\Omega_\Gamma}(\mathbb{T}_\Gamma \otimes \mathbb{C}) = \mathbb{T}_\Gamma \otimes \mathbb{C},$$

denn daraus folgt, daß $C_{\Omega_\Gamma}(\mathbb{M}_\Gamma \otimes \mathbb{C}) \subset \mathbb{T}_\Gamma \otimes \mathbb{C}$ kommutativ ist. Genauer haben wir:

Satz 4: (a) Der von einer Neuform $f \in \mathcal{N}(\Gamma)$ erzeugte $\mathbb{M}_\Gamma \otimes \mathbb{C}$-Untermodul $\Omega_\mathbb{M}(f) \subset \Omega_\Gamma$ ist ein irreduzibler $\mathbb{M} \otimes \mathbb{C}$-Modul.

(b) Es gibt eine Teilmenge $\mathcal{M}(\Gamma) \subset \mathcal{N}_2(\Gamma)$ derart, daß

$$\Omega_\Gamma = \bigoplus_{f \in \mathcal{M}(\Gamma)} \Omega_\mathbb{M}(f).$$

Außerdem gilt dann, daß $\Omega_\mathbb{M}(f) \not\simeq \Omega_\mathbb{M}(g), \forall f \neq g \in \mathcal{M}(\Gamma)$.

6. Der Fall $\Gamma = \Gamma(N)$.

Vorbemerkung: Obwohl die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma = \Gamma(N)$ die Vorraussetzungen der vorherigen Abschnitte nicht erfüllt, so ist sie doch konjugiert zu einer Untergrppe $\Gamma(N^2, N)$ mit $\Gamma_0(N^2) \geq \Gamma(N^2, N) \geq \Gamma_1(N^2)$, und daher lassen sich per Konjugation alle Definitionen und Resultate auf $\Gamma(N)$ übertragen.

Bezeichnung: Sind $f, g \in \mathcal{N}_2(\Gamma(N))$, so schreiben wir $f \sim g$, falls ihre Fourierkoeffizienten außerhalb N gleich sind, d.h.,

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad a_n(f) = a_n(g),\ \forall n \text{ mit } (n, N) = 1.$$

Ferner schreiben wir $f \approx g$, falls ein Twist $f_\chi \sim g$, wobei χ ein Dirichletcharakter mod N ist.

Satz 5: Sind $f, g \in \mathcal{N}_2(\Gamma(N))$, so gilt:

$$\Omega_{\mathbb{M}}(f) \simeq_{\mathbb{M}} \Omega_{\mathbb{M}}(g) \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_{\mathbb{M}}(f) = \Omega_{\mathbb{M}}(g) \quad \Leftrightarrow \quad f \approx g.$$

Zusammen mit Satz 4 folgt hieraus:

Satz 6: Ist $\Gamma = \Gamma(N)$, so ist

$$\dim_{\mathbb{Q}}(Z(\mathbb{M}_\Gamma^{nCM})) = |\mathcal{N}_2^{nCM}(\Gamma)|/\phi(N), \tag{6}$$

$$\dim_{\mathbb{C}}(Z(\overline{\mathbb{M}}_\Gamma^{CM})) = 2|\mathcal{N}_2^{CM}(\Gamma)|/\phi(N). \tag{7}$$

Hierbei bezeichnet

$$\mathcal{N}_2^{CM}(\Gamma) = \{f \in \mathcal{N}_2(\Gamma) : f_\chi \sim f \text{ für ein } \chi \neq 1\}$$

die Menge der Neuformen, die CM im Sinne von Ribet (1977) besitzen, und $\mathcal{N}_2^{nCM}(\Gamma)$ bezeichnet das Komplement.

Bemerkung: Durch die Werke von Hecke, Shimura (1971) und Ribet (1977) weiß man, daß die $f \in \mathcal{N}_2^{CM}(\Gamma)$ durch gewisse Größencharaktere zu Körpern $K \in \mathcal{K}$ konstruiert werden.

Ein penibles Abzählen solcher Größencharaktere (unter Zuhilfenahme gewisser Tatsachen über binäre Thetareihen) liefert

Satz 7: Für $N \geq 5$ ist

$$|\mathcal{N}_2^{CM}(\Gamma(N))| = \sum_{K \in \mathcal{K}_N} h(N^2/d_K)\frac{\phi(N)}{2}. \tag{8}$$

Korollar: Für $N \geq 5$ gilt $\mathcal{K}_{\Gamma(N)} = \mathcal{K}_N$, und daher ist

$$\dim(Z(\mathbb{E}_{\Gamma(N)}^{CM})) = 2|\mathcal{K}_N|, \tag{9}$$

während

$$\dim(Z(\mathbb{M}_{\Gamma(N)}^{CM})) = 2\sum_{K \in \mathcal{K}_N} h(N^2/d_K). \tag{10}$$

Daher: $Z(\mathbb{E}_N) = Z(\mathbb{M}_N) \Leftrightarrow h(N^2/d_K) = 1, \forall K \in \mathcal{K}_N.$

$\Rightarrow$ Hauptsatz!

Bemerkung: Man kann auch zeigen, daß (für $N \geq 5$)

$$|\mathcal{N}_2(\Gamma(N))| = \frac{1}{24}\phi(N)^2(\psi(N) - 6),$$

wobei $\psi(N) = N\prod_{p|N}(1 + \frac{1}{p})$. Daher ist

$$\dim Z(\mathbb{M}_N) = \frac{\phi(N)}{24}(\psi(N) - 6) + \frac{3}{2}\sum_{K \in \mathcal{K}_N} h(N^2/d_K).$$