GCB140 – Statistiques en ingénierie

Chapitres 5 & 6

Nasser Sadeghkhani[1]

[1]a.sadeghkhani@usherbrooke.ca

Février 2017

Outline

1. Quelques lois de probabilité discrète
   - Épreuve de Bernoulli (Expérience de Bernoulli)
   - Loi binomiale
   - Loi de Poisson
2. Quelques lois de probabilité continue
   - Loi exponentielle
   - Loi normale
   - Loi Log–normale

Outline

Définition 1 (Épreuve de Bernoulli)

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ayant deux issues :

- le succès S, avec une probabilité de p,
- l'échec E, avec une probabilité de $q = 1 - p$.

Donc, X : nombre de succès dans **une** expérience de Bernoulli.

$$P(X = x) = p^x \, q^{1-x}, \; x = 0, 1.$$

et on note $X \sim Ber(p)$.

L'espérance et la variance

$$E(X) = p,$$
$$V(X) = pq$$

Exemple : Si on lance un dé et qu'on nomme "succès" l'apparition de la face 6, on obtient la loi de Bernoulli, c.à.d $Ber(\frac{1}{6})$.

Outline

1. Quelques lois de probabilité discrète
   - Épreuve de Bernoulli (Expérience de Bernoulli)
   - Loi binomiale
   - Loi de Poisson

2. Quelques lois de probabilité continue
   - Loi exponentielle
   - Loi normale
   - Loi Log–normale

Définition 2 (Loi binomiale)

On dit X suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée $X \sim Bin(n, p)$ si X : du nombre de succès dans la répétition de n expériences de Bernoulli de paramètre p indépendantes.
Elle est définie par :

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \, q^{n-x}, \;\; x = 0, 1, \cdots, n.$$

Exemple 3

Lors d'un questionnaire à choix multiple avec 4 choix pour chacune des 20 questions, quelle est la probabilité pour qu'un étudiant ait 18 réponses correctes en répondant au hasard ?

L'espérance et la variance

$$E(X) = np,$$
$$V(X) = npq$$

Outline

Définition 4

La loi de Poisson modélise des situations où l'on s'intéresse au nombre d'occurrences d'un évènement dans un laps de temps déterminé ou dans une région donnée. Par exemple :

- Nombre d'appels téléphoniques qui arrivent à un standard en x minutes,
- nombre de clients qui attendent à la caisse d'un magasin,
- nombre d'accidents du travail dans une entreprise pendant un an.

Elle est définie par :

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \; x = 0, 1 \cdots$$

et on note $X \sim P(\lambda)$.
Le paramètre λ correspond à la moyenne de nombre d'occurrences d'un évènement.

Exemple 5

Une machine utilisée dans une chaîne de production tombe en panne en moyenne 2 fois par mois. Soit X le nombre de pannes par mois. En supposant que X suit une loi de Poisson, quelle est la probabilité que dans un mois donné la machine (i) Ne tombe pas en panne ? (ii) Tombe en panne au moins 2 fois ?
Dans 3 mois donné la machine tombe en panne au plus 2 fois ?

Outline

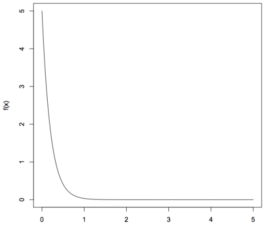
Loi exponentielle

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une *loi exponentielle* de paramètre λ si sa fonction de densité est

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \ , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dénote ceci par $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Figure – $X \sim Exp(5)$



Fonction de répartition

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \;\; x > 0.$$

L'espérance et la variance

$$E(X) = \frac{1}{\lambda},$$
$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exercice 1

La durée de fonctionnement d'un transistor suit une loi exponentielle et est en moyenne de $20,000$ heures $(= \frac{1}{\lambda})$. Quelle est la probabilité que ce transistor fonctionne au moins $30,000$ heures ? La même question si le transistor, fonctionne déjà depuis $20,000$ heures.

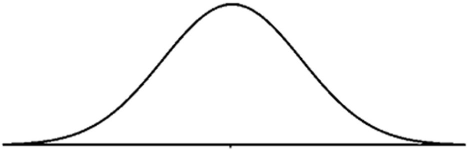
Outline

Loi normale

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une *loi normale* de paramètres μ et σ^2 si sa fonction de densité est

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ pour tout } x \,.$$

On dénote ceci $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.



Situation : Elle sert à décrire plusieurs phénomènes

Espérance et variance : $E(X) = \mu\,;\, Var(X) = \sigma^2$

loi normale centrée réduite (standard normal)

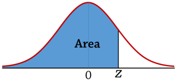
$\mathrm{N}(0, 1)$ est appelée la loi normale centrée réduite.

- Fonction de densité : $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{z^2}{2}\}, \ z \in \mathbb{R}$.
- Fonction de répartition : $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ pour $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$ et $z \in \mathbb{R}$.
- Puisque cette intégrale est difficile à évaluer, on a recours à une table de loi normale pour calculer $\Phi(z)$ et ensuit la probabilité.
- On peut ramener toute loi normale à une loi centrée réduite. (Standardizing)

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

Les propriétés

Table de loi $\mathrm{N}(0,1)$:



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Méthodes de calcul

- $\Phi(a) = P(Z \leq a) = P(Z < a)$,
- $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$,
- $P(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$,
- $P(a \leq X \leq b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$.

Exemple 6

Si $X \sim \mathrm{N}(-1, 4)$, alors :

a) $P(-2 \leq X \leq 1)$

b) $P(X \leq 0)$

c) $P(|X| < 2.12)$

Exercice 2

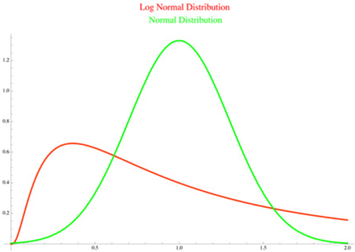
a) Déterminer la médian de v.a. Z, si $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

b) Déterminer b, si $X \sim \mathrm{N}(0, 2)$ et $F(b) = 0.6628$.

Outline

Loi Log–normale

Dans de nombreux cas, la loi n'est pas normale mais sa logarithme suit la loi normale,



Définition 7 (Loi Log–normale)

Une v.a. X est dite log–normale si la v.a. $\ln(X)$ suit une loi normale. Autrement dit : Si $Y \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X = e^Y \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$.