Stochastische Analysis für Zufallsmatrizen

Roland Speicher
Queen's University
Kingston, Kanada

Was ist eine Zufallsmatrix?

Zufallsmatrix = Matrix mit zufälligen Einträgen

$$A : \Omega \to M_N(\mathbb{C})$$

Was ist eine Zufallsmatrix?

Zufallsmatrix = Matrix mit zufälligen Einträgen

$$A : \Omega \to M_N(\mathbb{C})$$

d.h.

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$$

mit Zufallsvariablen

$$a_{ij} : \Omega \to \mathbb{C} \qquad (1 \leq i, j \leq N)$$

als Einträgen

Was will man über Zufallsmatrizen wissen?

Verhalten der Eigenwerte, insbesondere

- lokale Eigenschaften, z.B. Statistik des Abstandes benachbarter Eigenwerte oder des größten Eigenwertes

- globale Eigenschaften, z.B. Eigenwertverteilung oder globale Fluktuationen

Was will man über Zufallsmatrizen wissen?

Verhalten der Eigenwerte, insbesondere

- lokale Eigenschaften, z.B. Statistik des Abstandes benachbarter Eigenwerte oder des größten Eigenwertes

- globale Eigenschaften, z.B. Eigenwertverteilung oder globale Fluktuationen

Insbesondere Grenzwert

$$N \longrightarrow \infty$$

liefert interessante Struktur

Gaußsche Zufallsmatrizen

$$A_N = (a_{ij})_{i,j=1}^{N} : \Omega \to M_N(\mathbb{C})$$

wobei

Gaußsche Zufallsmatrizen

$$A_N = (a_{ij})_{i,j=1}^N : \Omega \to M_N(\mathbb{C})$$

wobei

- $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ (d.h. $A_N = A_N^*$)

Gaußsche Zufallsmatrizen

$$A_N = (a_{ij})_{i,j=1}^N : \Omega \to M_N(\mathbb{C})$$

wobei

- $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ (d.h. $A_N = A_N^*$)
- $\{a_{ij}\}_{1 \le i \le j \le N}$ sind unabhängige Gauß-verteilte Zufallsvariable mit

$$E[a_{ij}] = 0$$
$$E[|a_{ij}|^2] = \frac{1}{N}$$

Gaußsche Zufallsmatrizen

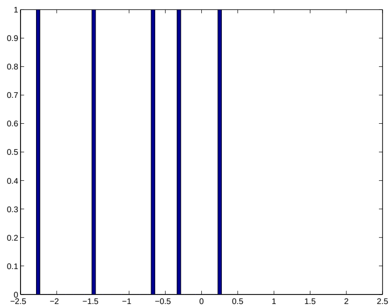
$$A_N = (a_{ij})_{i,j=1}^N : \Omega \to M_N(\mathbb{C})$$

wobei

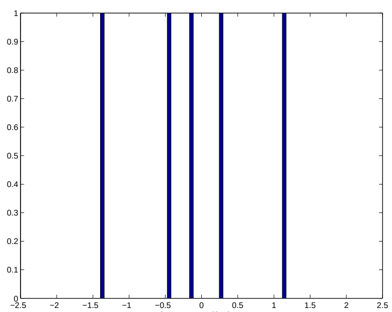
die gemeinsame Verteilung der Einträge a_{ij} gegeben ist durch

$$\frac{1}{Z_N} e^{-N \mathrm{Tr}(A_N^2)} \, dA_N$$

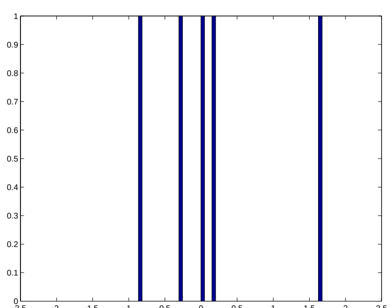
$$dA_N = \prod_{i \geq j} d\Re a_{ij} \prod_{k > l} d\Im a_{kl}$$



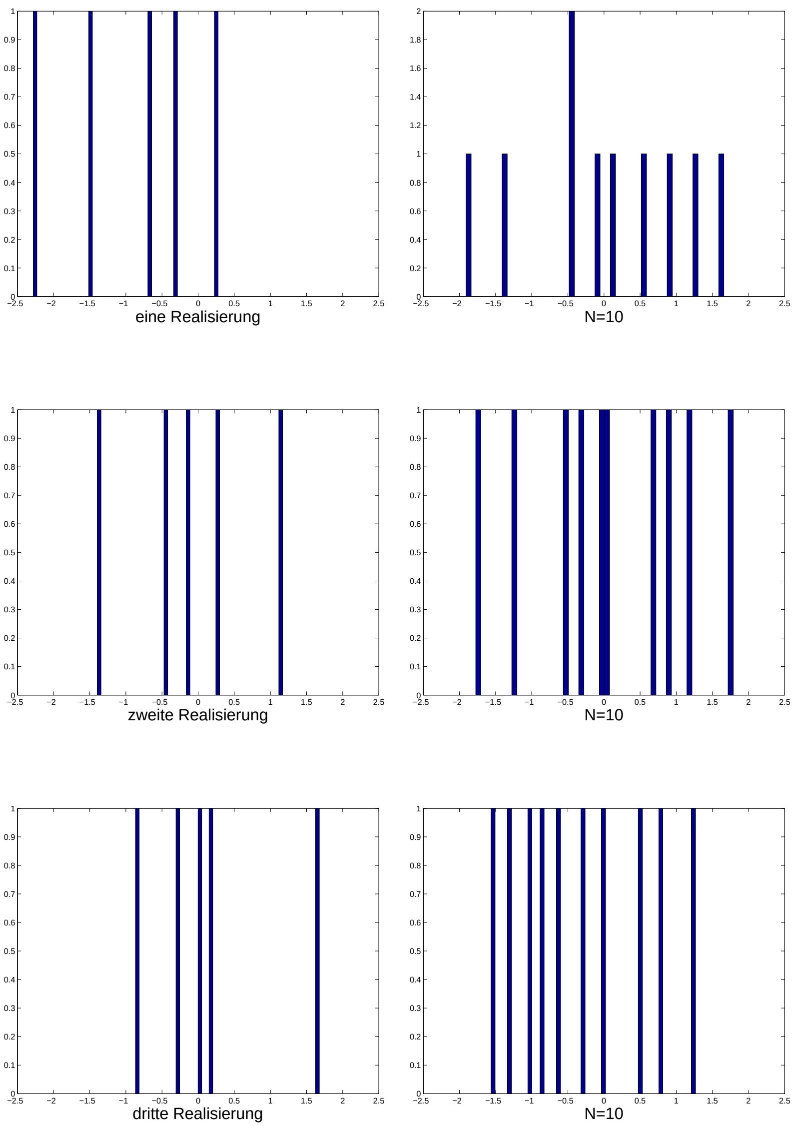
eine Realisierung

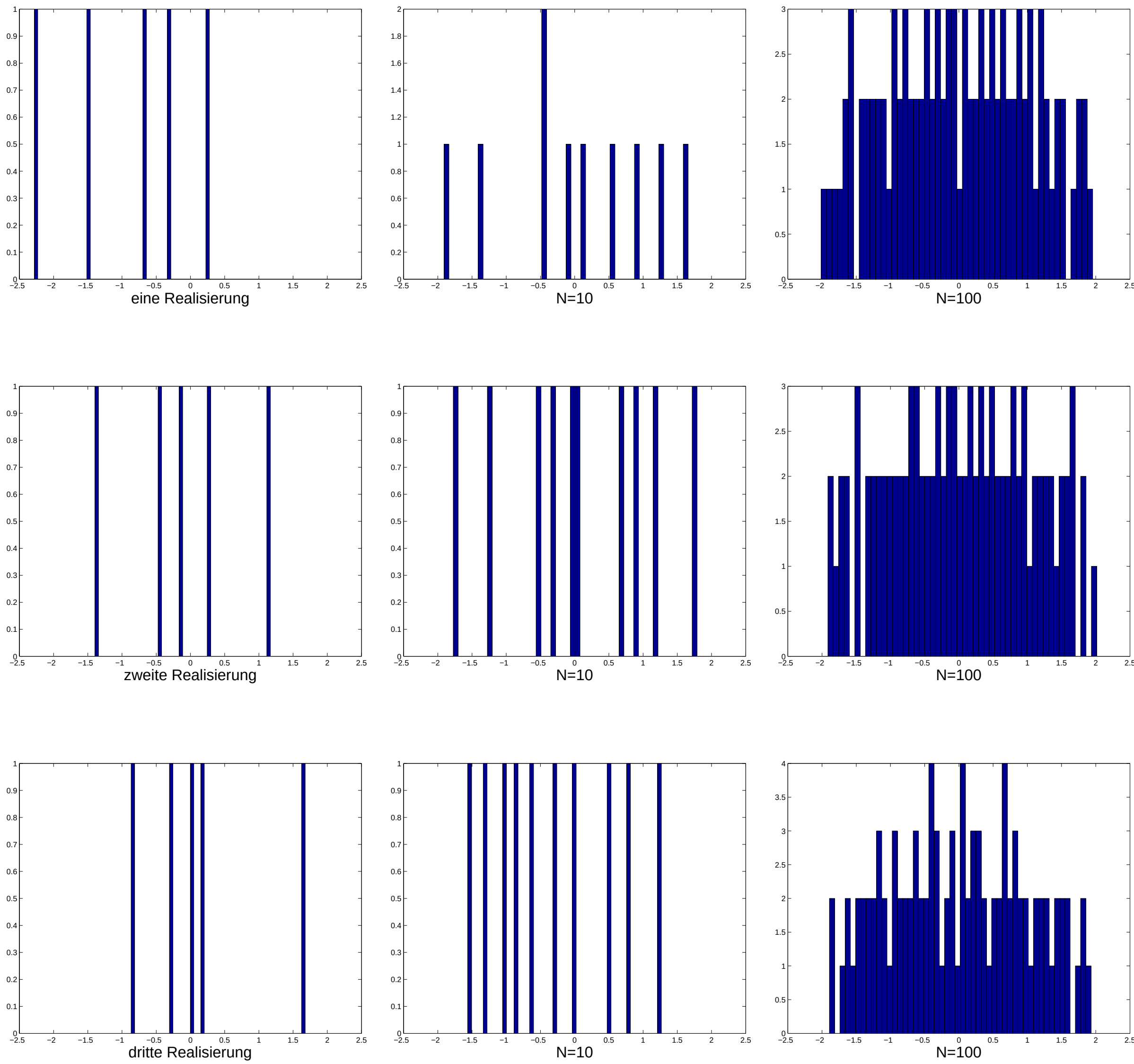


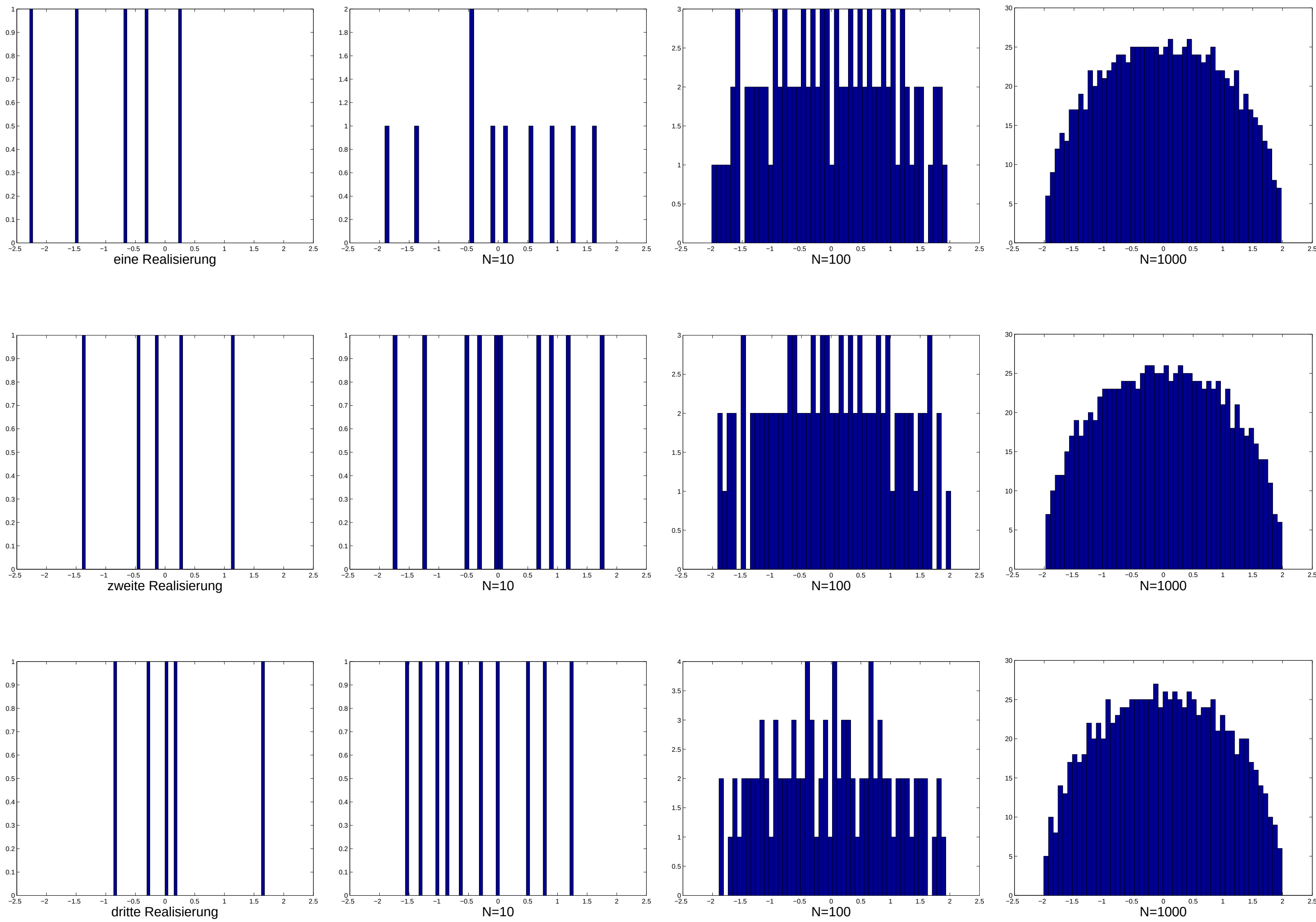
zweite Realisierung



dritte Realisierung

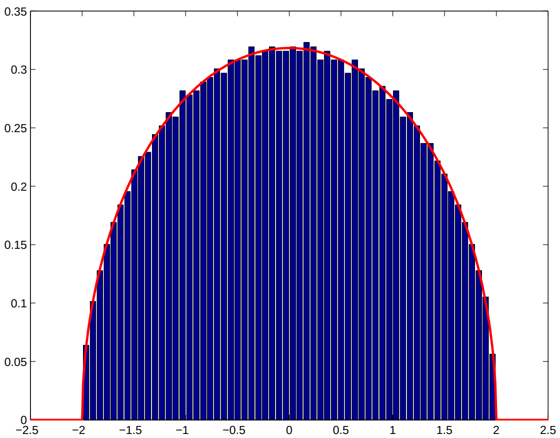

eine Realisierung
N=10
zweite Realisierung
N=10
dritte Realisierung
N=10


eine Realisierung
N=10
N=100
zweite Realisierung
N=10
N=100
dritte Realisierung
N=10
N=100

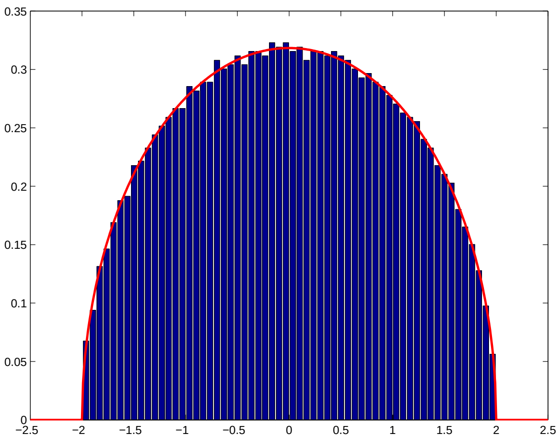

eine Realisierung
N=10
N=100
N=1000
zweite Realisierung
N=10
N=100
N=1000
dritte Realisierung
N=10
N=100
N=1000

Wignersches Halbkreisgesetz

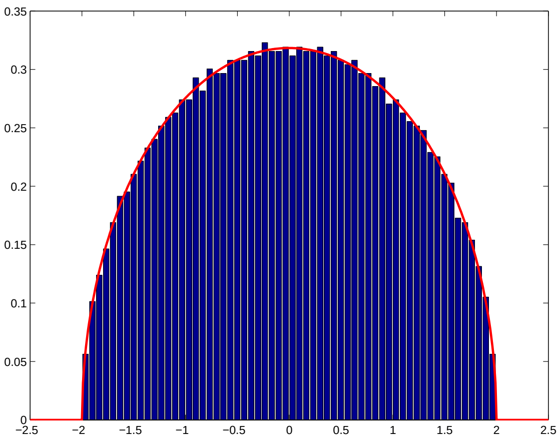
$$N = 4000$$



... one realization ...



... another realization ...



... yet another one ...

Wignersches Halbkreisgesetz: Seien $\lambda_1(\omega), \ldots, \lambda_N(\omega)$ die Eigenwerte der Gaußschen Zufallsmatrix $A_N(\omega)$ (gezählt mit Vielfachheit) und sei

$$\mu_N(\omega) := \frac{1}{N}(\delta_{\lambda_1(\omega)} + \cdots + \delta_{\lambda_N(\omega)})$$

die Eigenwertverteilung von $A_N(\omega)$.

Dann gilt fast sicher

$$\mu_N \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-t^2}dt \qquad \text{für } N \to \infty$$

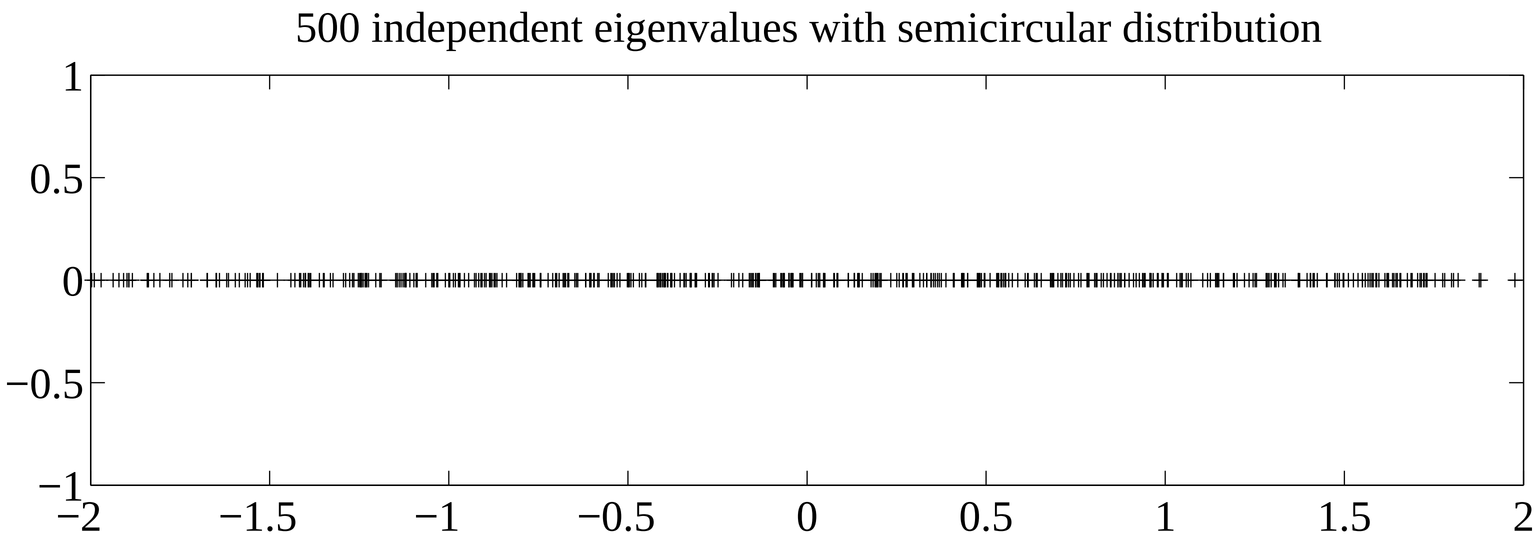
Beachte: die Eigenwerte von A_N sind **nicht unabhängig**;

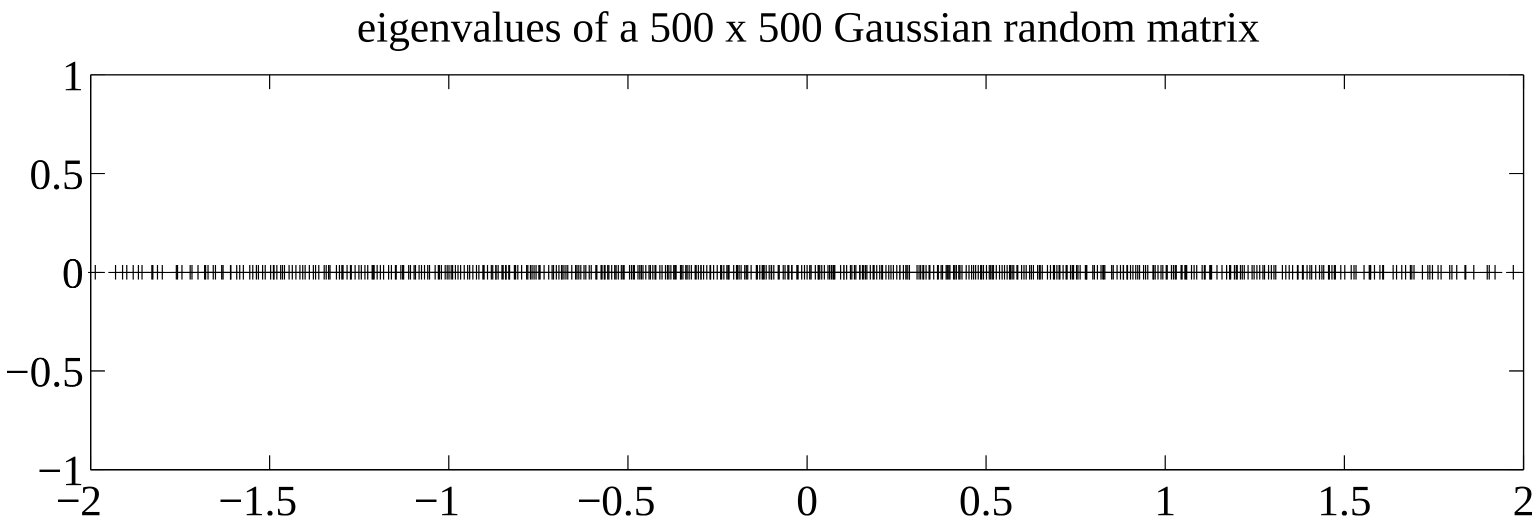
sondern die gemeinsame Eigenwertverteilung von A_N ist gegeben durch Dichte

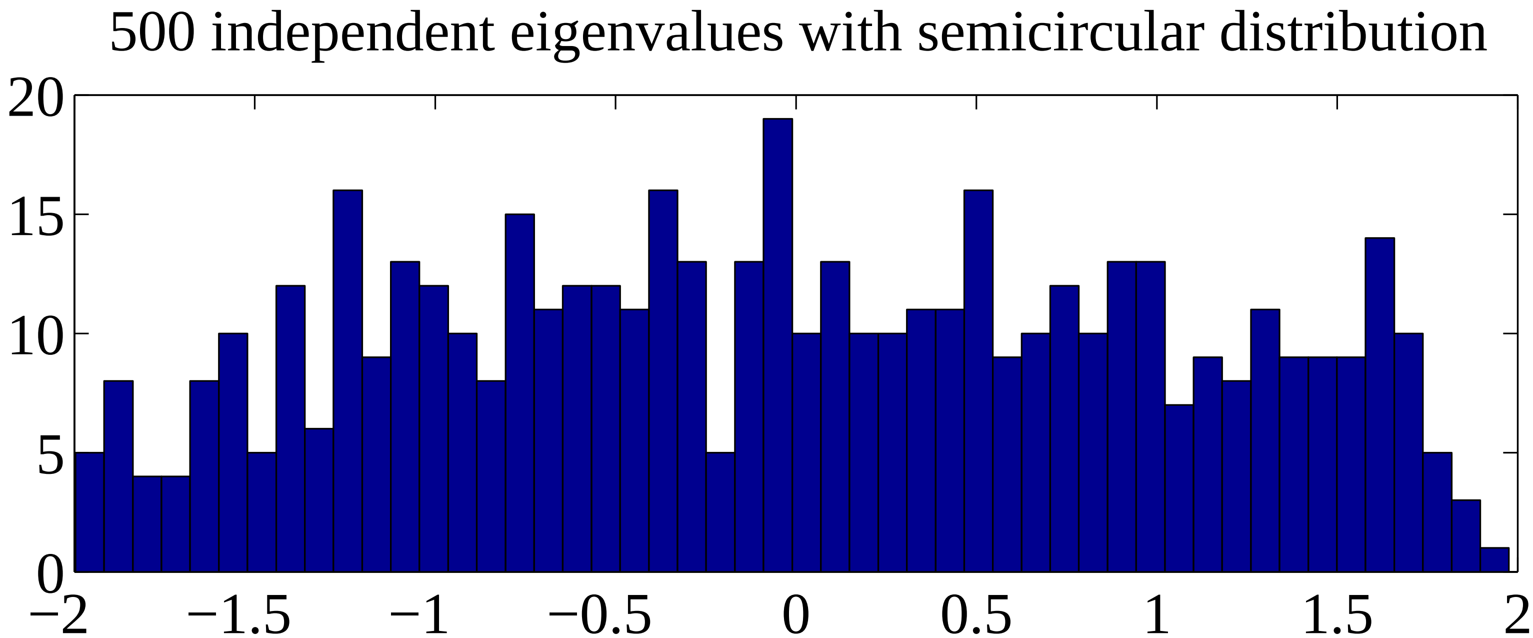
$$\frac{1}{Z_N} e^{-N(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_N^2)} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \, d\lambda_1 \cdots d\lambda_N,$$

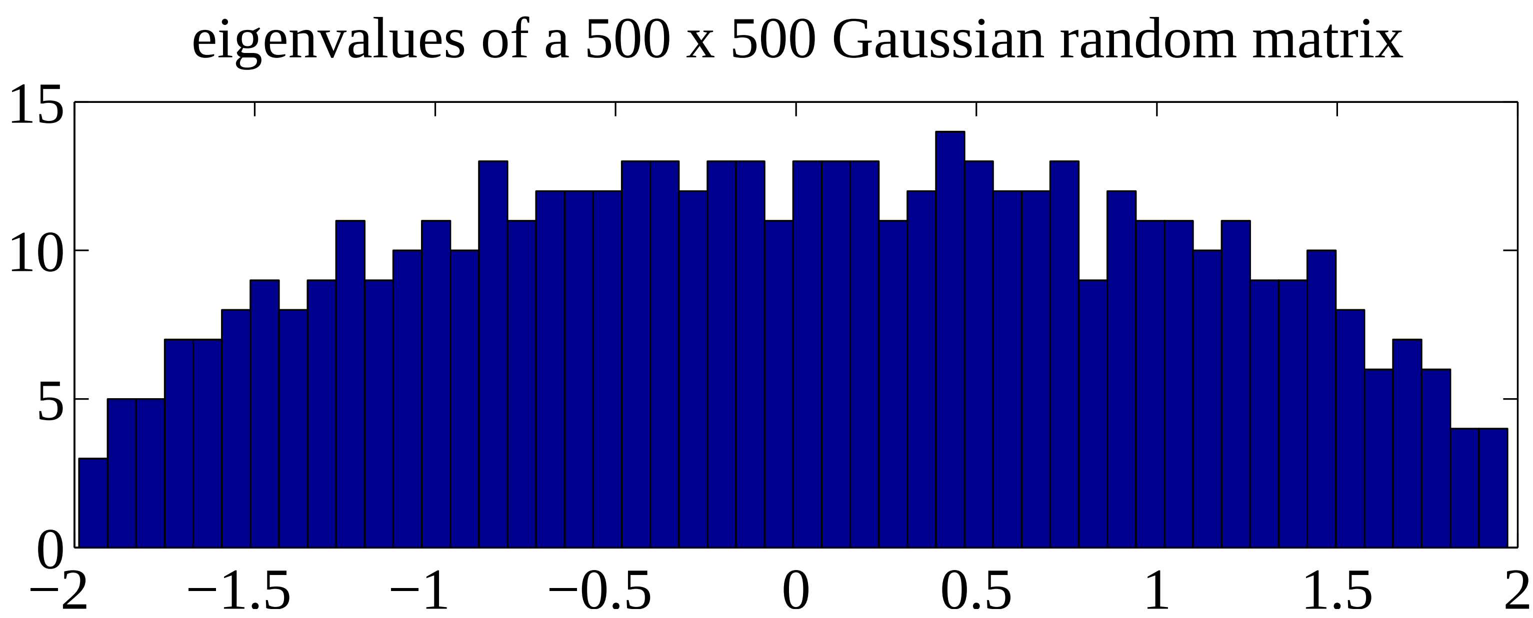
Eigenwerte wechselwirken wie

2-dimensionales Coulomb-Gas-System


500 independent eigenvalues with semicircular distribution
1
0.5
0
−0.5
−1
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2


eigenvalues of a 500 x 500 Gaussian random matrix
1
0.5
0
−0.5
−1
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2


500 independent eigenvalues with semicircular distribution
20
15
10
5
0
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2


eigenvalues of a 500 x 500 Gaussian random matrix
15
10
5
0
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2

Fragestellungen

- direkte ‘stochastische’ Beschreibung des Grenzwertes $N = \infty$
  - insbesondere Existenz und Eigenschaften des Limes $N \to \infty$ von Multi-Matrix-Modellen der Form

$$\frac{1}{Z_N} e^{-N \mathrm{Tr}(P(A_1,\ldots,A_m))} dA_1 \cdots dA_m$$

- Art der Konvergenz
  - Fluktuationen
  - große Abweichungen

Dynamische Beschreibung: Dyson Modell

$\boxed{\text{unabhängige Gaußvariable}} \rightarrow \boxed{\text{unabhängige Brownsche Bewegungen}}$

$$A_N(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^N$$

wobei

- $a_{ij}(t) = \bar{a}_{ji}(t)$
- $\{a_{ij}(\cdot)\}_{1 \leq i \leq j \leq N}$ sind unabhängige Brownsche Bewegungen

Übergang zu Prozessen erlaubt

- Realisierung von Verteilungen als Gleichgewichtsverteilungen eines Prozesses

- Beschreibung infinitesimaler Änderungen

- Benutzung von stochastischem Kalkül

Beschreibung des Grenzwertes $N = \infty$ von $A_N(t)$

- als Limes $N \to \infty$ von N diffundierenden wechselwirkenden Eigenwerten

$$d\lambda_i(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} dB_i(t) + \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \le j \le N \\ j \ne i}} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} dt$$

Beschreibung des Grenzwertes $N = \infty$ von $A_N(t)$

- als Limes $N \to \infty$ von N diffundierenden wechselwirkenden Eigenwerten

$$d\lambda_i(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} dB_i(t) + \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \le j \le N \\ j \ne i}} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} dt$$

- als McKean-Vlasov-Gleichung für die Dynamik der Eigenwertdichte μ_t von $A_N(t)$ für $N = \infty$

Beschreibung des Grenzwertes $N = \infty$ von $A_N(t)$

- als Limes $N \to \infty$ von N diffundierenden wechselwirkenden Eigenwerten

$$d\lambda_i(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} dB_i(t) + \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \le j \le N \\ j \ne i}} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} dt$$

- als McKean-Vlasov-Gleichung für die Dynamik der Eigenwertdichte μ_t von $A_N(t)$ für $N = \infty$

$$\int f(\lambda) \mu_t(d\lambda) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(\lambda_t(t))$$

Beschreibung des Grenzwertes $N = \infty$ von $A_N(t)$

- als Limes $N \to \infty$ von N diffundierenden wechselwirkenden Eigenwerten

$$d\lambda_i(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} dB_i(t) + \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \le j \le N \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} dt$$

- als McKean-Vlasov-Gleichung für die Dynamik der Eigenwertdichte μ_t von $A_N(t)$ für $N = \infty$

$$\frac{d}{dt} \int f(\lambda) \mu_t(d\lambda) = \iint \frac{\mu_t(dy)}{\lambda - y} f'(\lambda) \mu_t(d\lambda)$$

Vollständige stochastische Beschreibung des Prozesses $A_N(t)$ im Limes $N \to \infty$ erfordert nicht nur Kenntnis von Marginalverteilungen $\mu_t = \lim_{N\to\infty} \mathrm{Vert}(A(t))$, sondern auch

gemeinsame Verteilung zu verschiedenen Zeiten.

Vollständige stochastische Beschreibung des Prozesses $A_N(t)$ im Limes $N \to \infty$ erfordert nicht nur Kenntnis von Marginalverteilungen $\mu_t = \lim_{N\to\infty} \text{Vert}(A(t))$, sondern auch

gemeinsame Verteilung zu verschiedenen Zeiten.

Aber: $A_N(t)A_N(s) \neq A_N(s)A_N(t)$,

d.h. gemeinsame Eigenwertverteilung von $A_N(t)$ und $A_N(s)$ macht keinen Sinn.

Vollständige stochastische Beschreibung des Prozesses $A_N(t)$ im Limes $N \to \infty$ erfordert nicht nur Kenntnis von Marginalverteilungen $\mu_t = \lim_{N\to\infty} \mathrm{Vert}(A(t))$, sondern auch

gemeinsame Verteilung zu verschiedenen Zeiten.

Aber: $A_N(t)A_N(s) \neq A_N(s)A_N(t)$,

d.h. gemeinsame Eigenwertverteilung von $A_N(t)$ und $A_N(s)$ macht keinen Sinn.

Es gilt:

$$\int \lambda^m \mu_t(d\lambda) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(t)^m = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\Big(A_N(t)^m\Big)$$

Vollständige stochastische Beschreibung des Prozesses $A_N(t)$ im Limes $N \to \infty$ erfordert nicht nur Kenntnis von Marginalverteilungen $\mu_t = \lim_{N\to\infty} \mathrm{Vert}(A(t))$, sondern auch

gemeinsame Verteilung zu verschiedenen Zeiten.

Aber: $A_N(t)A_N(s) \neq A_N(s)A_N(t)$,

d.h. gemeinsame Eigenwertverteilung von $A_N(t)$ und $A_N(s)$ macht keinen Sinn.

Allgemeiner betrachte

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\Big(A_N(t_1)\cdots A_N(t_m)\Big) \quad \forall t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$$

Die **freie Brownsche Bewegung** $\{\mathbf{S(t)} \mid \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ ist definiert als der Grenzwert von den $N \times N$-matrixwertigen Brownschen Bewegungen $\{A_N(t) \mid t \geq 0\}$ durch

- nicht-kommutierende Variable $S(t)$ $(t \geq 0)$
- Zustand E auf der von den $S(t)$ erzeugten Algebra, definiert durch

$$E\Big[S(t_1) \cdots S(t_m)\Big] := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\Big(A_N(t_1) \cdots A_N(t_m)\Big)$$

Die freie Brownsche Bewegung kann beschrieben werden

- abstrakt als GNS Konstruktion bzgl. E
- konkret durch Operatoren auf Fockräumen

Realisierung auf Fockraum

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+), \qquad \mathcal{F}(\mathcal{H}) = \Omega\mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n}$$

Für $g \in \mathcal{H}$ haben wir zugehörigen Erzeugungsoperator $l^*(g)$:

$$l^*(g)\Omega = g$$
$$l^*(g)h_1 \otimes \cdots \otimes h_n = g \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_n$$

Dann realisiert

$$S(t) = l^*(1_{[0,t]}) + l(1_{[0,t]})$$

und

$$E[a] = \langle \Omega, a\Omega \rangle$$

die freie Brownsche Bewegung.

Auf der von $S(t)$ $(t \geq 0)$ erzeugten Algebra haben wir die L^p-Normen bzgl. E, insbesondere

- L^2-norm

$$\|a\|_2 := E[aa^*]^{1/2}$$

- L^∞-Norm = Operatornorm

$$\|a\|_\infty = \|a\| = \lim_{p \to \infty} E[(aa^*)^p]^{1/2p}$$

Beachte: Verteilung von $S(t)$ ist Halbkreis mit Radius $2\sqrt{t}$, d.h.

$$\|S(t)\| = 2\sqrt{t}$$

Ito-Kalkül für freie Brownsche Bewegung

Prozess $\{A(t) \mid t \geq 0\}$ heißt adaptiert, falls $A(t)$ nur von $S(\tau)$ $(\tau \leq t)$ abhängt.

Für adaptierte Prozesse $\{A(t) \mid t \geq 0\}$ und $\{B(t) \mid t \geq 0\}$ definiere stochastisches Integral

$$\int A(t)dS(t)B(t)$$

[Definition für stückweise konstante Prozesse:

$$\int A(t)dS(t)B(t) := \sum_i A(t_i)\Big(S(t_{i+1}) - S(t_i)\Big)B(t_i)$$

]

Theorem [Biane, Speicher]: Es gilt

- Ito Isometrie

$$\left\| \int A(t)dS(t)B(t) \right\|_2^2 = \int \|A(t)\|_2^2 \cdot \|B(t)\|_2^2 \, dt$$

Theorem [Biane, Speicher]: Es gilt

- Ito Isometrie

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|_2^2 = \int \|A(t)\|_2^2 \cdot \|B(t)\|_2^2 \, dt$$

- Burkholder-Gundy-Ungleichung

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|^2 \leq 2\sqrt{2} \int \|A(t)\|^2 \cdot \|B(t)\|^2 \, dt$$

Theorem [Biane, Speicher]: Es gilt

- Ito Isometrie

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|_2^2 = \int \|A(t)\|_2^2 \cdot \|B(t)\|_2^2 \, dt$$

- Burkholder-Gundy-Ungleichung

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|^2 \leq 2\sqrt{2} \int \|A(t)\|^2 \cdot \|B(t)\|^2 \, dt$$

- Ito-Formel

$$dS(t) dS(t) = dt$$

Theorem [Biane, Speicher]: Es gilt

- Ito Isometrie

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|_2^2 = \int \|A(t)\|_2^2 \cdot \|B(t)\|_2^2 \, dt$$

- Burkholder-Gundy-Ungleichung

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|^2 \leq 2\sqrt{2} \int \|A(t)\|^2 \cdot \|B(t)\|^2 \, dt$$

- Ito-Formel

$$dS(t) A dS(t) = ??$$

Theorem [Biane, Speicher]: Es gilt

- Ito Isometrie

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|_2^2 = \int \|A(t)\|_2^2 \cdot \|B(t)\|_2^2 \, dt$$

- Burkholder-Gundy-Ungleichung

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|^2 \leq 2\sqrt{2} \int \|A(t)\|^2 \cdot \|B(t)\|^2 \, dt$$

- Ito-Formel

$$dS(t) A dS(t) = E[A] dt$$

Theorem [Biane, Speicher]: Es gilt

- Ito Isometrie

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|_2^2 = \int \|A(t)\|_2^2 \cdot \|B(t)\|_2^2 \, dt$$

- Burkholder-Gundy-Ungleichung

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|^2 \leq 2\sqrt{2} \int \|A(t)\|^2 \cdot \|B(t)\|^2 \, dt$$

- Ito-Formel

$$dS(t) A dS(t) = E[A] dt$$

- Chaos-Zerlegung, Skorohod-Integral, ...

Theorem [Biane, Speicher]: Es gilt

- Ito Isometrie

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|_2^2 = \int \|A(t)\|_2^2 \cdot \|B(t)\|_2^2 \, dt$$

- Burkholder-Gundy-Ungleichung

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|^2 \leq 2\sqrt{2} \int \|A(t)\|^2 \cdot \|B(t)\|^2 \, dt$$

- Ito-Formel

$$dS(t) A dS(t) = E[A] dt$$

- stochastische Analysis auf ‘Wignerraum’

Anwendungen des freien stochastischen Kalküls

- freie Diffusionsgleichungen (Biane, Speicher 2001)

- Existenz des Grenzwertes von Multi-Matrix-Modellen der Form

$$\frac{1}{Z_N} e^{-N\mathrm{Tr}(P(A_1,\dots,A_m))} dA_1 \cdots dA_m$$

  und Zusammenhang mit diagrammatischen Entwicklungen für 'konvexe' Potentiale (Guionnet, Shlyakhtenko 2007)

Theorem [Biane, Speicher]: Sei V' eine Operator Lipschitz Funktion. Betrachte die freie stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = -\frac{1}{2}V'(X_t)dt + dS_t$$

Dann gilt

- Existenz, Eindeutigkeit der Lösung; Stetigkeit von $t \mapsto \|X_t\|$
- $d\mu_t(x) = p_t dx$, wobei p_t beschränkt und $p_t \in L^3(\mathbb{R})$
- freie Fokker-Planck-Gleichung: [H Hilbert-Transformierte]

$$\frac{\partial p_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[(Hp_t(x) - \frac{1}{2}V'(x))p_t(x)],$$

- Definiere relative freie Entropie

$$\Sigma(\mu) := \iint_{\mathbb{R}^2} \log|x-y| d\mu(x) d\mu(y) - \int_{\mathbb{R}} V(x) d\mu(x)$$

und relative freie Fisher Information

$$I(\mu) = 4 \int_{\mathbb{R}} \Big(Hp(x) - \frac{1}{2} V'(x) \Big)^2 p(x) dx.$$

Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \Sigma(\mu_t) = \frac{1}{2} I(\mu_t).$$

- Für freien Ornstein Uhlenbeck Prozess ($V(x) = \lambda x^2$) haben wir freie log Sobolev Ungleichung

$$\frac{1}{4\lambda} I(\mu) \geq \Sigma(\mu_\infty) - \Sigma(\mu)$$

Globale Fluktuationen der Eigenwerte

Sei A_N Gaußsche Zufallsmatrix.

Wignersches Halbkreisgesetz sagt

$$\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(A_N^k) \to \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} t^k \sqrt{4-t^2}\,dt,$$

also z.B.

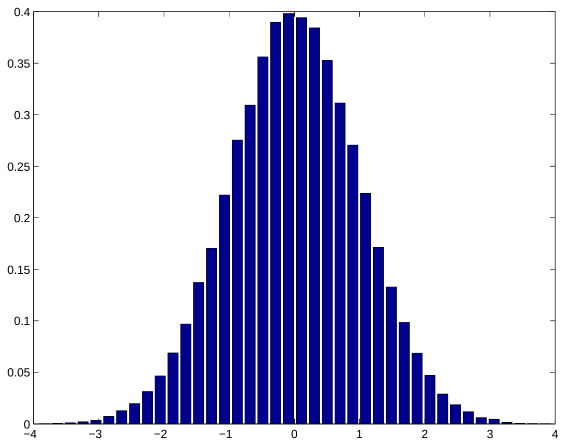
$$\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(A_N) \to 0 \qquad \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(A_N^2) \to 1 \qquad \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(A_N^4) \to 2$$

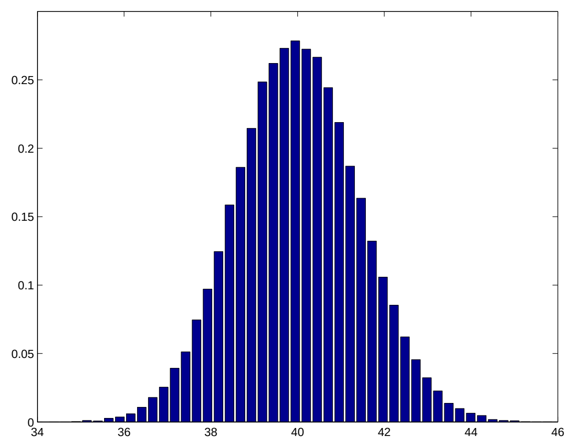
Skalierte Fluktuationen um diesen Grenzwert

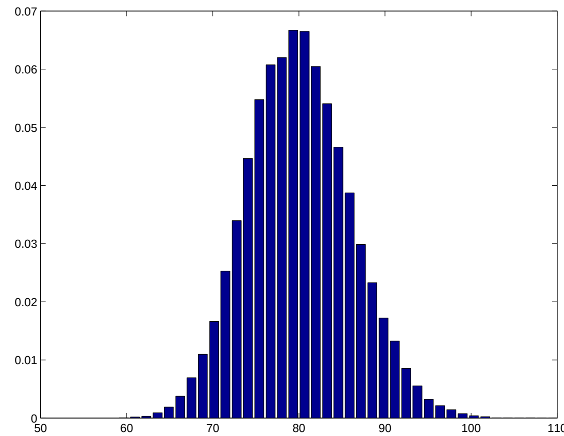
$$\mathrm{Tr}(A_N^k) - N\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} t^k\sqrt{4-t^2}\,dt$$

sind, für $N \to \infty$, Gauß-verteilt mit berechenbarer Varianz

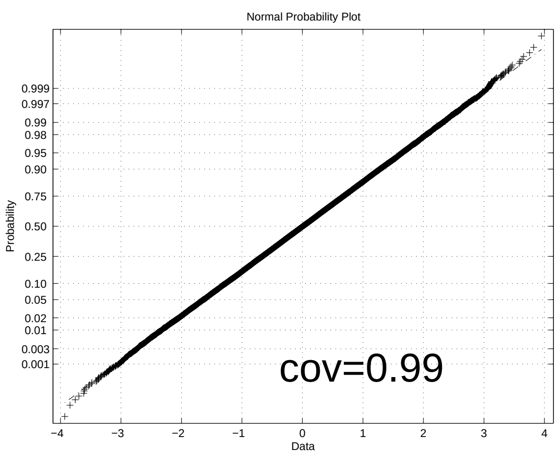
Example: Gaussian random matrix A ($N = 40$, trials=50.000)

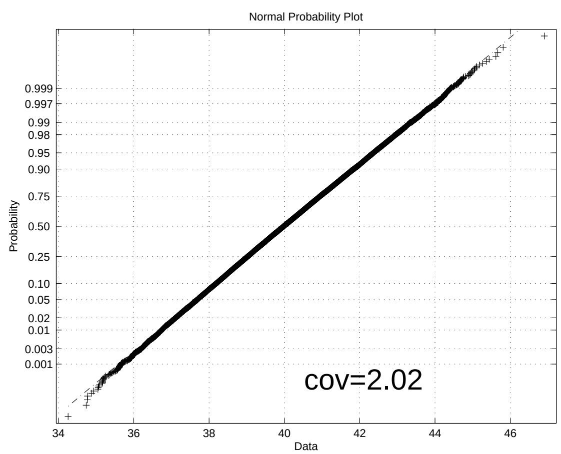


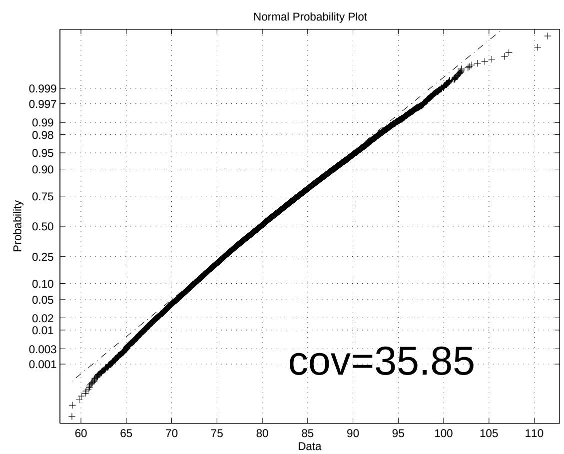




. $\mathrm{Var}(\mathrm{Tr}(A)) = 1$ $\mathrm{Var}(\mathrm{Tr}(A^2)) = 2$ $\mathrm{Var}(\mathrm{Tr}(A^4)) = 36$







Problem: Betrachte andere Zufallsmatrizenmodelle, insbesondere Multi-Matrix-Modelle. Zeige, dass auch dort Fluktuationen von Spuren normalverteilt sind und beschreibe ihre Varianz!

Ergebnisse:

- Gaußsche Zufallsmatrizen
  (Johansson 1998; Cabanal-Duvillard 2001)

- Wishart Zufallsmatrizen
  (Jonsson 1982; Kusalik, Mingo, Speicher 2006)

- unitäre Zufallsmatrizen
  (Diaconis, Shahshahani 1994; Mingo, Sniady, Speicher 2006, Radulescu 2006)

Theorem [Mingo, Sniady, Speicher]: Betrachte unabhängige Folgen $\{U_1\}_N, \dots, \{U_r\}_N$ von Haar verteilten unitären $N \times N$-Zufallsmatrizen. Dann konvergiert die Familie

$$\mathrm{Tr}[U_{i(1)}^{k(1)} \cdots U_{i(n)}^{k(n)}]$$

von Spuren in zyklisch reduzierten Wörtern in diesen Zufallsmatrizen gegen eine Gaußsche Familie von zentrierten Zufallsvariablen, wobei die Kovarianz gegeben ist durch die zyklischen Matchings zwischen den zwei reduzierten Wörtern

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{cov}\Big\{\mathrm{Tr}[U_{i(1)}^{k(1)} \cdots U_{i(m)}^{k(m)}], \mathrm{Tr}[U_{j(n)}^{l(n)} \cdots U_{j(1)}^{l(1)}]\Big\}$$

$$= \delta_{mn} \cdot \#\Big\{r \in \{1, \dots, n\} \mid i(s) = j(s+r),$$
$$k(s) = -l(s+r) \quad \forall s = 1, \dots, n\Big\}$$